

La generación del interés desde el Modelo Matemático

María Juana Frare¹

Recibido: junio 2005. Aceptado (con referato) agosto 2005.

Resumen

Este trabajo intenta aportar una teoría ordenada sobre los distintos modos de generación y capitalización de los intereses, con las consecuencias financieras y prácticas que cada uno de ellos trae aparejadas.

Se analizan los siguientes casos: interés simple, compuesto, exponencial y continuo.

Como instrumento para el análisis se utilizarán los modelos matemáticos implícitos y sus propiedades pertinentes, en especial la propiedad de escindibilidad.

Incluye una breve reseña histórica

Abstract

The aim of this paper is to contribute with an ordered (regulated) theory on the different ways of arousing and capitalizing interests, taking into account the financial and practical consequences that it may bring along.

¹ Profesora Titular de Matemática Financiera. Facultad de Ciencias Económicas. U.N.Cuyo.

The following cases are analysed: simple interest, compound interest, exponential interest and continuous interest.

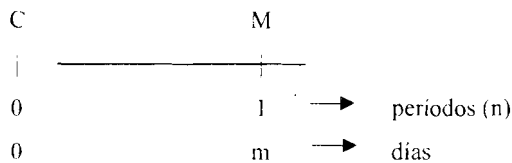
The instruments used for this analysis are the implicit mathematic models and their corresponding characteristics, in particular the splitting characteristic.

This paper also includes a brief historical reference.

INTRODUCCIÓN

Es indudable que en estos tiempos el tema del interés, como concepto financiero, está involucrado en la mayoría de las operaciones comerciales.

Si se toma como ejemplo básico una inversión consistente en un intercambio -en distintos momentos del tiempo- de dos capitales, uno inicial llamado capital (C) y otro final, montante o monto (M), la cuantificación del interés (I) en valores monetarios resulta sencilla, ya que se obtiene como diferencia entre ambos.



$$I = M - C$$

Para tener una mejor percepción de la variación del capital, es más adecuado expresarla en función de la tasa de interés, definida como el interés ganado por cada peso de inversión inicial en el plazo transcurrido, y calculada como el cociente entre el interés y el capital inicial.

$$i = \frac{I}{C} = i_{(m)}$$

Esta tasa está necesariamente relacionada con el plazo -tiempo transcurrido entre el momento inicial y el final-, que en un ejemplo elemental como éste, coincide con un período. Por esta razón puede también llamarse tasa periódica e indicarse $i_{(m)}$, siendo m la cantidad de días del período.

También se puede analizar la situación mediante una valoración dinámica del capital, cuyo axioma elemental afirma que “el capital crece, al menos nominalmente, por el solo transcurso del tiempo”.

Si bien este interés se expresa y se calcula en general al final del período, su generación no es espontánea a la fecha de vencimiento de la operación. Es lógico pensar que el interés se produjo a todo lo largo del plazo, y más precisamente día por día, para la práctica financiera y legislación vigentes.

Pero aun cuando exista acuerdo en esta afirmación, hay diferentes criterios en cuanto a la capitalización de esos intereses, es decir, en qué momento deben sumarse al capital para generar nuevos intereses.

Ello se pone de manifiesto cuando se trata de calcular los intereses para un plazo (t) distinto al período unitario definido anteriormente, particularmente si ese plazo no es igual a un número entero de períodos.

Esta dispersión de criterios ha dado lugar al surgimiento de los distintos regímenes del interés y de tasas de distinta definición y aplicación. Esta situación se podría calificar de caótica, al menos para quienes pretenden aproximarse al concepto sin haber hecho un profundo análisis del tema.

Este trabajo intenta aportar una teoría ordenada sobre los distintos modos de generar y capitalizar los intereses, con las consecuencias financieras y prácticas que cada uno de ellos trae aparejadas. Como instrumento se utilizarán los modelos matemáticos implícitos y sus propiedades pertinentes.

Es importante aclarar que cuando se hable de resultado o rendimiento de la operación, a los efectos de simplificar el vocabulario, se debe entender que no se tiene en cuenta factores como gastos, impuestos, inflación, etc.

EL MODELO MATEMÁTICO

La Matemática como herramienta para el desarrollo de otras ciencias tiene un rol de indiscutible importancia. El nexo que resuelve esta relación, es el modelo matemático.

La Matemática Financiera no escapa a esta regla, y es así como se observa que a partir de

un hecho real como es la existencia de los problemas financieros, se han diseñado a lo largo del tiempo diferentes modelos que han intentado dar una solución válida a esos problemas cotidianos: lineal, exponencial, discreto, continuo y otros.

EL INTERÉS A TRAVÉS DE LA HISTORIA

Si bien no es frecuente encontrar información histórica sobre cálculos financieros, éstos han sido aplicados en todas las grandes civilizaciones desde los tiempos más remotos. A partir de la observación de estos datos, se puede inferir que la modalidad de generación y cálculo de intereses, ha sido consecuente con la evolución de los conceptos matemáticos a través del tiempo.

Es así como se sabe que las civilizaciones mesopotámicas (aproximadamente 2000 a 500 a.C.), aplicaban lo que se conoce hoy como interés compuesto para períodos enteros -en general años- y simple para fracciones de períodos.

Boyer (1996)², presenta un ejemplo de cálculo de interés en la antigua Mesopotamia.

Para resolver los problemas de interés compuesto, se valían de las tablillas de potencias sucesivas de un número. Estas tablas de tipo exponencial, son análogas a las utilizadas en la

² Boyer, C. (1996), *Historia de la Matemática*.

actualidad, salvo que los huecos que separan las entradas eran mayores. Para salvar esta dificultad, recurrían a la interpolación lineal, tema ampliamente dominado por los matemáticos de la época.

Un ejemplo de ello es el cálculo del tiempo que demora un capital en duplicarse colocado a cierta tasa anual.

Para una tasa del 0,20 anual, que en su sistema de numeración de base 60 se representa $12/60$, la respuesta es $3;47;13;20$ años, lograda a partir de la interpolación lineal entre $(1;12)^3$ y $(1;12)^4$, resultado que se obtiene aplicando la fórmula:

$$M = C(1+i)^n$$

Para que un capital inicial de 1 \$ se duplique, es decir, se obtenga un capital final de 2 \$, resulta:

$$2 = 1 \times 1,2^n \quad \rightarrow \quad 2 = 1 \left(1; \frac{12}{60} \right)^n$$

la solución para este cálculo se obtenía en la tablilla de potencias:

$$3 < n < 4$$

Tiempo	Capital final (base 60)	Capital final (base 10)
3 años	$(1;12)^3$	1,728
?	2	2
4 años	$(1;12)^4$	2,0736

Una vez conocido entre qué valores enteros se encontraba el resultado, se interpolaba linealmente obteniendo $3;47;13;20$ años.

Esta respuesta puede ser transformada a numeración decimal:

$$3 + \frac{47}{60} + \frac{13}{60^2} + \frac{20}{60^3} = 3,78703703 \text{ años} = 3 \text{ años } 283 \text{ días}$$

A continuación se presentan los cálculos de acuerdo con los conocimientos actuales. Aplicar interpolación lineal equivale a devengar intereses en forma lineal para el subperíodo, es decir:

$$2 = 1 \times 1,2^3 \times \left(1 + \frac{0,2}{360} f \right) \Rightarrow f = 283 \text{ días}$$

resultado que coincide exactamente con el obtenido en aquellas épocas.

Se entiende por subperíodo a aquél cuya duración es menor a la duración del período de la tasa considerada. Por ejemplo, 283 días es un subperíodo para el caso de trabajar con tasa anual.

Ya en la edad moderna, Jacobo Bernoulli (1655-1705), se relacionaba con científicos contemporáneos de primer orden y se instruyó autodidácticamente en cuestiones elementales, sobre todo en matemáticas aplicadas.

Entre las demostraciones y temas tratados en una disertación sobre sucesiones (1689), es notable el tratamiento del interés compuesto continuo (función de e), según lo menciona Hofmann (1961)³.

Un poco más adelante en el tiempo, se observa una aplicación al cálculo del interés de la ley de Malthus (1766-1834), originalmente utilizada para el cálculo de la población de la tierra, como función exponencial creciente del tiempo.

$$x = K e^{\delta t} \quad \text{con } K = e^{-\delta t_0} \quad \text{o} \quad x = e^{\delta(t-t_0)}$$

“En el mismo orden de ideas se pueden citar los intereses compuestos: 1 \$ colocado durante un año, produce r \$, . . . Al cabo de un año se puede admitir . . . que los r \$ se agreguen al capital, que será así $(1+r)$. . . al cabo del segundo será $(1+r)^2$. . . y $(1+r)^n$ al cabo de n años. Pero también pueden convenir las partes en agregar los intereses al capital, no cada año, sino cada $\frac{1}{2}$, cada $\frac{1}{4}$, cada $\frac{1}{p}$ de año, aunque este extraño convenio no se hace en la práctica. Esto equivale a decir, simplemente, que el interés producido queda dividido por p (1 \$ produce r \$ en un año, luego produce r/p \$ en $1/p$ de año). El número de capitalizaciones ya no es n , sino pn . Al cabo de n años, 1 \$ se habrá convertido en

$$\left(1 + \frac{r}{p}\right)^{pn} \text{ pesos, suma evidentemente superior a la anterior, puesto que los}$$

intereses comenzaron a producir antes. Las partes podrán tener escrúpulos y decirse: “Capitalicemos todos los días, $p = 1/365$; pero si esta capitalización se realiza a la hora 0, los intereses producidos a las 0 hs. 1 minuto no producirán hasta el minuto siguiente, y no sería equitativo”. De escrúpulo en escrúpulo llegarían a tomar formidables valores de p ; a cada momento aumenta el capital y este aumento es proporcional a su valor en aquel momento. Los financieros demasiado escrupulosos tal vez se preguntarían si el capital no llegaría a ser infinito en algunos segundos, pero, más dichosos que ellos, nosotros podemos responder: el capital aumenta según una ley maltusiana, la cantidad n que representaba, en suma, el incremento medio por año y por habitante, está sustituido por r que representa el interés producido por 1 \$ en un año, en un momento dado

$$\frac{dC}{dt} = rC \quad \text{con } C = C_0 e^{rt}$$

siendo evidentemente C_0 el valor del capital cuando $t = 0$, puesto que $e^0 = 1$. De aquí resulta que los escrúpulos de los financieros les condujeron a un resultado muy defendible y que volvemos a encontrar un resultado ya advertido: cuando los financieros toman números p cada vez mayores, hacen lo que llamamos tender p

hacia infinito, y acabamos de ver que el límite de $\left(1 + \frac{r}{p}\right)^{pn}$, en estas condiciones, es e^{rn} , ya que el límite de

³ Hofmann, E. (1961), *Historia de la Matemática*, vol. 2.

$$n \left(1 + \frac{r}{p} \right)^{pn} = \left(1 + \frac{r}{p} \right)^P \text{ es } n e^{r/n} = e^{rn}$$

resultado que habíamos enunciado sin demostrarlo.”⁴

El avance en la teoría matemática no desplazó en la práctica los modelos anteriores, sino que coexisten todos ellos, dando lugar a la multiplicidad de modalidades financieras (regímenes) que se presentan hoy en el cálculo y generación de intereses.

ALGUNAS CONSIDERACIONES IMPORTANTES

Los regímenes del interés expresan una relación funcional entre el interés (I) o el monto de la operación (M), con las variables capital inicial (C) y tiempo, plazo, o duración (t), que son medidas relativas a la operación. A estos valores se agregan frecuentemente otros, llamados parámetros, como la tasa de interés $i_{(m)}$, entendida ésta como la compensación por el uso de un capital ajeno, para una unidad monetaria, durante un período de m días de duración, tomado como unidad de tiempo.

Si no se aclara otra cosa, se debe entender que la tasa “i” es la tasa válida para un período de duración m días, que también puede expresarse como $i_{(m)}$.

En la práctica, todas las fórmulas que expresan los distintos regímenes correspondientes a distintos modelos matemáticos, tienen al capital como factor, es decir que siempre el interés y el monto son proporcionales al capital C. En general:

$$M = C f(t)$$

El factor $f(t)$ recibe el nombre de factor de capitalización o de montante; multiplicado por el capital inicial da por resultado el capital final. Su expresión depende del modelo que se trate.

El factor que permite obtener el capital inicial a partir del capital final se denomina factor de actualización o descuento y es igual a $f^{-1}(t)$. De tal forma que:

$$f(t) f^{-1}(t) = 1$$

La nomenclatura para el tiempo utilizada en este trabajo será:

- t: duración total de la operación en días;
- m: número de días del período correspondiente a la tasa;
- n: número de períodos de duración m días.

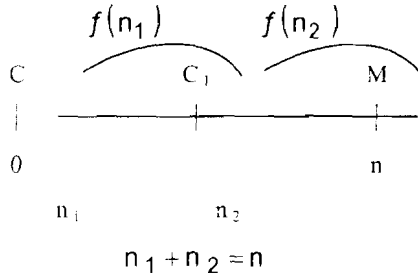
$$n = \frac{t}{m} = n' + f; \text{ con } n' \text{ parte entera de } n \text{ y } 0 \leq f < 1.$$

⁴ Pelletier, J. (1958). *Etapas de la Matemática*, pp. 145-146.

PROPIEDAD DE ESCINDIBILIDAD

Existe dentro de la Matemática Financiera una propiedad muy importante: la propiedad de escindibilidad. Ella permite afirmar que el monto de una inversión no varía si se divide la operación en varias operaciones sucesivas, reinvertiendo en cada una de ellas el montante obtenido en la anterior.

Ello significa que es suficiente multiplicar el capital final de un período por el factor de capitalización del próximo y así sucesivamente hasta completar el plazo.



Se debe considerar la escindibilidad desde dos aspectos: a) la acción de escindir, definida como la interrupción de la operación en un momento cualquiera, para reiniciarla en forma inmediata, y b) la propiedad de escindibilidad, que implica que el resultado al escindir la inversión es el mismo que si no se hubiera hecho. Esta propiedad no se cumple en todos los modelos del interés que serán analizados.

Los modelos exponenciales son los únicos escindibles cuando se trata de leyes de una sola variable.

La escindibilidad es muy valiosa desde el punto de vista analítico porque trae aparejadas grandes simplificaciones algebraicas.

RELACIÓN DE EQUIVALENCIA

Otro concepto fundamental es el de capitales equivalentes.

A continuación se define la relación "capitales equivalentes": *dado un régimen de interés y una tasa ($i > 0$), dos capitales C_n y C_m son equivalentes, si y sólo si C_m es igual al valor final de C_n y consecuentemente, C_n es igual al valor actual de C_m , calculados con el régimen y la tasa considerados*

$$C_m = C_n f(t) \quad \text{o} \quad C_n = C_m f^{-1}(t)$$

Donde

$$f(t) f^{-1}(t) = 1$$

Los subíndices indican posición en el tiempo. Suele utilizarse $C_0 = C$.

Desde el punto de vista analítico, una relación de equivalencia es una relación binaria interna sobre un conjunto no vacío, que cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

Definiciones

Propiedad reflexiva: Todo capital es equivalente a sí mismo

$$C_k = C_k f(0)$$

Propiedad simétrica: Si un capital es equivalente a otro, éste es equivalente al primero

$$\text{si } C_n = C_0 f(n) \text{ entonces } C_0 = C_n f^{-1}(n)$$

Propiedad transitiva: Si un capital es equivalente a otro, y éste es equivalente a un tercero, el primero es equivalente al tercero

$$\text{si } C_{n_1} = C_0 f(n_1) \text{ y } C_{n_1, n_2} = C_{n_1} f(n_2)$$

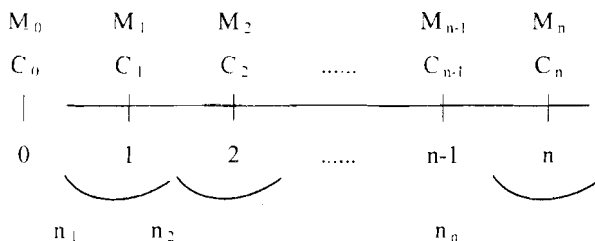
$$\text{entonces } C_{n_1, n_2} = C_0 f(n_1 + n_2)$$

Se puede demostrar que las dos primeras propiedades se cumplen en todos los modelos que se analizarán, no así la propiedad transitiva.

Todo régimen de interés que cumpla con la propiedad de escindibilidad, también cumple con la propiedad transitiva de la equivalencia.

Cuando se trata de operaciones más complejas, de más de dos capitales, la propiedad de escindibilidad trae aparejada algunas consecuencias importantes que facilitan los razonamientos y cálculos:

- Si se quiere obtener el valor final de varios capitales C_0, C_1, \dots, C_n se puede calcular progresivamente. Se calcula el monto del primero a la fecha del segundo, se suman estos dos valores y su resultado se capitaliza hasta la fecha del tercero y así sucesivamente hasta llegar al último.



Esta operación queda simbolizada por la siguiente expresión recursiva:

$$M_0 = C_0$$

$$M_k = M_{k-1} f(n_k) + C_k \quad \text{para } k \geq 1$$

que también es totalmente aplicable en casos de cambios de tasa y duración del período.

- Una vez que se han reunido todos los capitales en una fecha, puede valuarse su resultado en cualquier fecha, posterior o anterior, como si fuera un capital único.

Para ello se aplica el factor de capitalización o de actualización (operación inversa), según corresponda.

- Los cálculos son válidos tanto para capitales positivos (tomados como aportes) como negativos (correspondientes a retiros), ya que el resultado depende sólo de la fecha en que se hizo efectivo el movimiento.
- Si dos conjuntos de capitales son equivalentes en una fecha, lo son también en cualquier otra.

CAPITALIZACIÓN

Tanto o más importante que el cálculo del interés resulta el concepto de capitalización de ese interés, que consiste, por definición, en sumar el interés al capital para ganar a su vez intereses. Esta noción es de especial relevancia, porque su distinto tratamiento, da lugar a los diversos modelos del interés.

Es decir que la decisión que se tome respecto del momento en que se capitalizan los intereses, trará aparejada la elección del modelo matemático para su cálculo y viceversa.

Antes de conocer los distintos regímenes del interés, se enumeran los casos en que formalmente se produce la capitalización.

- En una operación simple, al finalizar la operación cumplido el plazo estipulado.
- Por una cláusula contractual; en general en forma periódica.
- Si se interrumpe la operación, retirando el monto que resulta y renovándola por un capital igual al importe retirado.
- Si se retiran los intereses de la primera operación y se vuelven a invertir por separado.
- Existen modelos donde la capitalización es inherente al mismo. No se habla de capitalización como conversión de los intereses en capital, sino que se sigue un concepto de valoración dinámica del capital.

Es decir que hay capitalización cuando se conviene entre las partes que periódicamente los intereses se sumen al capital, para ganar intereses, o por su reinversión fuera de la operación inicial. Pero también involucra al concepto de capitalización el derecho que tiene el acreedor a percibir los intereses devengados, cualquiera sea el tiempo transcurrido. Esto bajo la óptica de la valoración dinámica del capital.

PERIODICIDAD DE LA TASA

Otro punto a tener en cuenta al momento de pactar o valuar una operación, es la definición del plazo de la tasa de interés. Lo más adecuado es elegir una tasa cuya periodicidad sea:

- Coincidente con el plazo al cabo del cual las partes convienen en terminar la operación, si es un simple intercambio de dos capitales.
- Concordante con el intervalo de tiempo que transcurre entre dos movimientos de fondos consecutivos, en el caso de ser períodos regulares.
- En caso de períodos irregulares, una tasa efectiva anual a partir de la cual se calculen las tasas periódicas equivalentes necesarias.

REGÍMENES DEL INTERÉS

Se presentan a continuación los regímenes más conocidos y utilizados en Matemática Financiera (pueden presentarse algunas diferencias en cuanto a la denominación dada a cada uno de ellos).

A. RÉGIMEN DE INTERÉS SIMPLE

En este modelo los intereses se pagan al finalizar la operación, y se calculan:

$$I = C i_{(m)} n$$

El interés resulta proporcional al capital y al tiempo, propiedad que suele tomarse como definición del interés simple.

Si lo que se desea calcular es el monto:

$$M = C (1 + i_{(m)} n)$$

donde $f(t) = (1 + i_{(m)} n)$, para $n = t/m$, número de períodos de duración m días, contenidos en el plazo t que dura la operación, pudiendo ser este número entero o no.

Este modelo de interés tiene las siguientes características:

Aplicación del interés simple para varios períodos enteros

$$M = C (1 + i_{(m)} n)$$

Como se mencionó anteriormente, lo más adecuado en este caso es definir la tasa de la operación como $i_{(nm)}$ y con ella calcular el capital final.

$$M = C (1 + i_{(nm)})$$

de esta forma queda determinado exactamente el resultado de la operación.

Tal como han quedado expresadas las tasas en las fórmulas anteriores, las tasas $i_{(m)}$ e $i_{(nm)}$ se llaman proporcionales.

El uso de la tasa $i_{(m)}$ como referente, puede prestar a confusiones ya que se puede interpretar el período de m días como el momento en que el acreedor puede disponer de los intereses generados con la tasa $i_{(m)}$ hasta ese momento. Si es así, es fácil ver que no se obtiene igual resultado aplicando $i_{(mn)}$.

El siguiente ejemplo ilustra el caso: si una operación a 60 días se pacta al 4 %, hablar de un 2 % mensual da la idea que al cabo de 30 días se han devengado intereses en esa proporción, pudiendo disponer de ellos, con lo que al cabo de 60 días resulta un rendimiento del 4,04 %.

Entre las tasas proporcionales de mayor difusión está la tasa nominal anual (TNA). Ella es un claro ejemplo de lo dicho anteriormente. Se pacta cierta TNA, pero se aplica una proporcional $i_{(m)}$, para una operación de plazo m .

Propiedad de escindibilidad

La función lineal no es escindible, por lo tanto el interés simple no cumple con la propiedad transitiva de la equivalencia de capitales. Esto implica que no es una relación de equivalencia.

$$M = C(1 + i_{(m)} n) = C[1 + i_{(m)}(n_1 + n_2)]$$

Escindiendo la operación en n_1 y n_2 :

$$C_1 = C(1 + i_{(m)} n_1)$$

$$M^* = C_1(1 + i_{(m)} n_2)$$

si se reemplaza C_1 por su igual

$$M^* = C(1 + i_{(m)} n_1)(1 + i_{(m)} n_2) = C[1 + i_{(m)}(n_1 + n_2) + i_{(m)}^2 n_1 n_2] \neq M$$

Esto implica, en la práctica, que si en algún punto comprendido dentro del plazo n se produce una modificación -por ejemplo en la tasa- o se debe incorporar algún movimiento de fondos, los cálculos siguiendo el modelo lineal no se pueden resolver "cortando" la operación en ese punto y modificando de allí en más los parámetros. Por el contrario, su resolución es más compleja, encontrándose en muchos casos errores en el procedimiento.

Aplicación del interés simple para un subperíodo

Cuando $n = t/m$, número de períodos de duración m resulta no entero, o por necesidades prácticas es necesario considerar una fracción de período, indicada con f , el interés simple presenta una característica muy particular.

Por ser el interés una función lineal del tiempo, el incremento del capital es constante para cada período considerado. De esta forma la tasa subperiódica de interés es decreciente a medida que se avanza en el tiempo.

Si se toma un período de duración m y se divide en dos fracciones de igual duración: f_1 y f_2 , el interés producido en cada una de ellas será:

$$I_1 = C i_{(m)} f_1 \quad \text{e} \quad I_2 = C i_{(m)} f_2 \quad \text{iguales entre sí.}$$

Las tasas periódicas correspondientes a cada una de esas fracciones, de acuerdo con la definición de tasa, es decir igual al cociente entre el interés y el capital inicial, se calculan:

$$i_1 = \frac{I_1}{C} \quad \text{e} \quad i_2 = \frac{I_2}{C + I_1}$$

donde $i_2 < i_1$. En general se puede demostrar que las tasas subperiódicas de igual duración, son siempre decrecientes a medida que avanza el tiempo.

$$i_{k+1} = \frac{i_k}{1 + i_k}$$

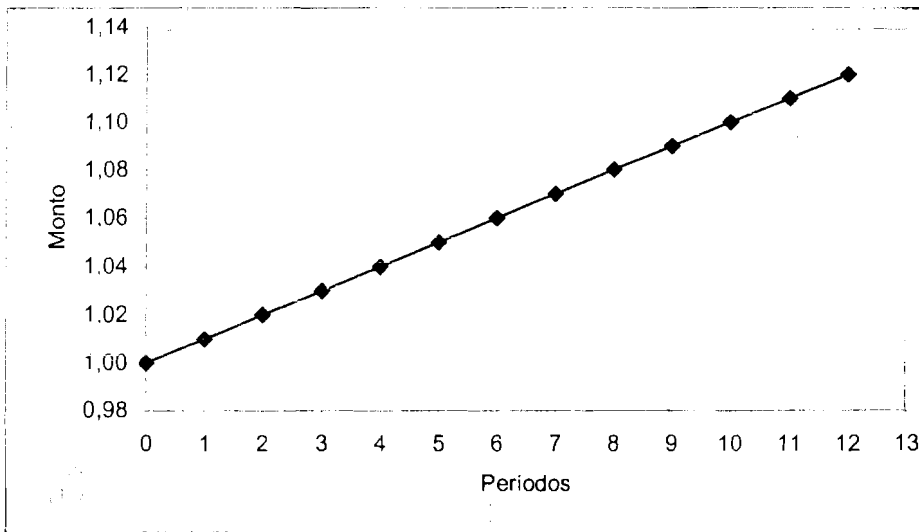
En el ejemplo que se muestra a continuación, se supone un período anual, con una tasa del 12%. Se calculan para los 12 meses consecutivos que componen el año: el monto, el interés y la tasa subperiódica, correspondientes a 1 \$ de capital inicial.

Mes	M	I	Tasa Mensual
0	1,00		
1	1,01	0,01	0,01000
2	1,02	0,01	0,00990
3	1,03	0,01	0,00980
4	1,04	0,01	0,00971
5	1,05	0,01	0,00962
6	1,06	0,01	0,00952
7	1,07	0,01	0,00943
8	1,08	0,01	0,00935
9	1,09	0,01	0,00926
10	1,10	0,01	0,00917
11	1,11	0,01	0,00909
12	1,12	0,01	0,00901

Para simplificar se consideran todos los meses de igual duración

Si bien los intereses correspondientes a cada mes son iguales, la tasa mensual, que es subperiódica respecto del período anual elegido, es decreciente mes a mes.

En el siguiente gráfico se representa la evolución del capital a lo largo del año.



B. RÉGIMEN DE INTERÉS COMPUESTO

En este modelo los intereses se capitalizan periódicamente para producir nuevos intereses. Los intereses se consideran generados dentro de cada período, en forma lineal.

De esta forma si se presenta un caso con tiempo no entero, la solución es mixta: compuesto para la parte entera y lineal para la fraccionaria.

La fórmula de cálculo más utilizada es la del monto:

$$M = C \left(1 + i_{(m)}\right)^{n'} \left(1 + i_{(m)} f\right)$$

con
$$f(t) = \left(1 + i_{(m)}\right)^{n'} \left(1 + i_{(m)} f\right)$$

para n' = parte entera del cociente t/m , y f la fraccionaria. Si $f = 0$, la expresión se reduce a:

$$M = C \left(1 + i_{(m)}\right)^n \quad \text{y} \quad f(t) = \left(1 + i_{(m)}\right)^n$$

En el interés compuesto, el interés no es proporcional al tiempo.

La tasa que se debe aplicar es siempre de una periodicidad coincidente a la de los períodos de capitalización.

Este modelo de interés tiene las siguientes características:

Aplicación del interés compuesto para varios períodos enteros

$$M = C \left(1 + i_{(m)}\right)^n$$

donde
$$f(t) = \left(1 + i_{(m)}\right)^n$$

El rendimiento total de la operación se obtiene considerando el tiempo total $t = m \times n$:

$$M = C \left(1 + i_{(t)}\right)$$

$$i_{(t)} = i_{(mn)} = \frac{M}{C} - 1 = \left(1 + i_{(m)}\right)^n - 1$$

En este caso resulta indistinto el uso de la tasa periódica $i_{(m)}$ aplicada n veces o la capitalización única con la tasa multiperiodica $i_{(mn)}$. Se dice entonces que ambas tasas son equivalentes.

Para usar un ejemplo comparable con el del interés simple de la página 91, se obtiene igual resultado aplicando dos veces una $i_{(30)} = 0,02$ que una $i_{(60)} = 0,0404$.

Propiedad de escindibilidad

La función exponencial sí es escindible, lo que permite afirmar que el monto de una inversión no varía si se divide la operación en varias sucesivas, reinvertiendo en cada una de ellas el montante obtenido en la anterior. Matemáticamente se puede afirmar que cumple con la propiedad transitiva.

Si se quiere obtener el monto de un capital C al cabo de n períodos se debe aplicar la siguiente definición:

$$M = C \left(1 + i_{(m)}\right)^n$$

Si se escinde la operación en n_1 y su resultado vuelve a invertirse durante n_2 :

$$C_1 = C \left(1 + i_{(m)}\right)^{n_1}$$

$$C_2 = C_1 \left(1 + i_{(m)}\right)^{n_2}$$

si se reemplaza C_1 por su igual

$$C_2 = C \left(1 + i_{(m)}\right)^{n_1} \left(1 + i_{(m)}\right)^{n_2} = C \left(1 + i_{(m)}\right)^{n_1 + n_2} = C \left(1 + i_{(m)}\right)^n = M$$

Esta propiedad permite cambios de tasa e introducción de valores monetarios de signo positivo o negativo en cualquiera de los periodos enteros de la operación.

En el interés compuesto esta propiedad se cumple sólo cuando n es entero.

Aplicación del interés compuesto para fracciones de periodo

Por haber definido la generación subperiódica en forma lineal con la expresión:

$$M = C \left(1 + i_{(m)}\right)^{n'} \left(1 + i_{(m)} f\right)$$

una operación de este tipo pierde las características tanto de la función exponencial como de la lineal. La tasa de la operación, que no es equivalente ni proporcional a $i_{(m)}$, se calcula:

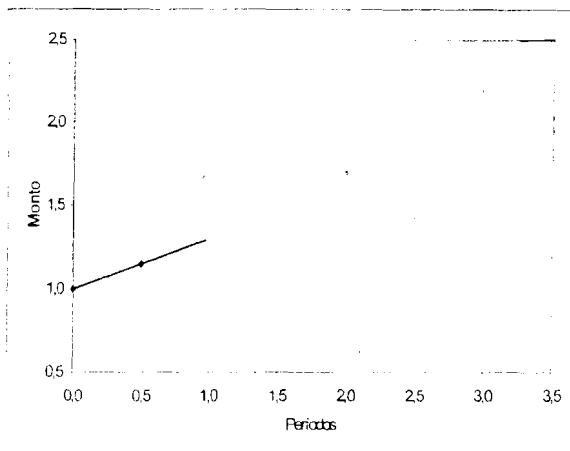
$$i(t) = i_{(m \times n + f)} = \frac{M}{C} - 1$$

En este caso la operación deja de ser escindible.

En el siguiente ejemplo se presenta la evolución de un capital de 1 \$, depositado al 30 % periódico, durante 3 periodos. Se ha intercalado el valor del capital en la mitad del periodo para observar su formación.

Mes	M	I	Tasa $i_{(m/2)}$	Tasa $i_{(t)}$
0,0	1,000	0,000		
0,5	1,150	0,150	0,1500	0,1500
1,0	1,300	0,150	0,1304	0,3000
1,5	1,495	0,195	0,1500	0,4950
2,0	1,690	0,195	0,1304	0,6900
2,5	1,944	0,254	0,1500	0,9435
3,0	2,197	0,254	0,1304	1,1970

En el siguiente gráfico se representa la evolución del capital a lo largo de los meses.



C. RÉGIMEN EXPONENCIAL

En el régimen exponencial, los intereses se calculan en forma exponencial, cualquiera sea el plazo de la operación y la periodicidad de la tasa elegida. Esta definición implica la capitalización diaria. Es decir que se puede pensar en el régimen exponencial como una ampliación del dominio de la función $f(t)$ del régimen compuesto, a números racionales.

$$M = C \left(1 + i_{(m)} \right)^n$$

En este caso $n = t/m$, puede ser entero o no.

$$f(t) = \left(1 + i_{(m)} \right)^n$$

El monto es una función exponencial, para cualquier valor de n .

Este modelo de interés tiene las siguientes características:

Aplicación del interés compuesto para varios períodos enteros o no

Por la definición misma del modelo, no tiene sentido diferenciar entre casos donde n es entero o no.

$$M = C \left(1 + i_{(m)} \right)^n$$

El rendimiento total de la operación se obtiene:

$$i_{(t)} = \frac{M}{C} - 1 = \left(1 + i_{(m)} \right)^n - 1$$

En este caso resulta indistinto el uso de la tasa periódica $i_{(m)}$ aplicada n veces o la capitalización única con la tasa $i_{(t)}$. Se dice entonces que ambas tasas son equivalentes.

$$i_{(t)} = (1 + i_{(m)})^n - 1$$

Al ser la generación del interés y su capitalización diarias, es indistinto el cálculo con tasas de distinta periodicidad, mientras cumplan la condición de ser equivalentes, es decir $m \times n = t$.

Se puede demostrar que las tasas subperiódicas de igual duración son iguales, independientemente del momento (k) en que se calculen.

$$i_{k+1} = i_k$$

Una tasa equivalente de amplia difusión es la tasa efectiva anual (TEA), que es la tasa equivalente para 365 días.

Propiedad de escindibilidad

Como la $f(t)$ de este modelo es una función exponencial para cualquier valor de n , cumple con la propiedad de escindibilidad. Esto ofrece una total simplificación de los cálculos, por las propiedades anteriormente vistas.

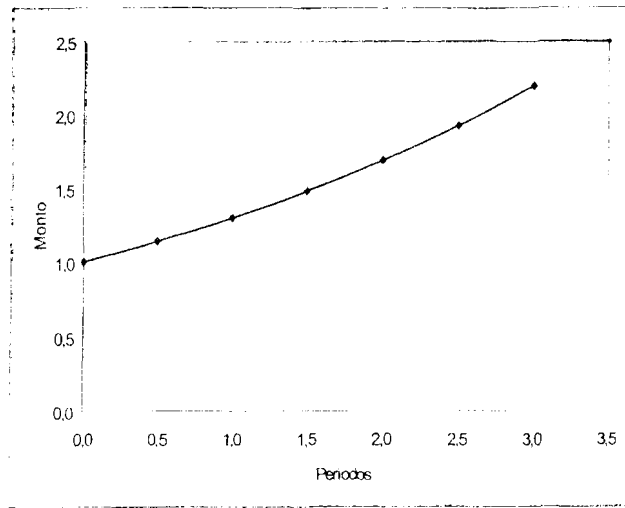
Si se aplica este modelo en el ejemplo visto para interés compuesto, se obtienen los siguientes resultados:

Mes	M	I	Tasa $i_{(m/2)}$	Tasa total
0,0	1,000	0,000		
0,5	1,140	0,140	0,1402	0,1402
1,0	1,300	0,160	0,1402	0,3000
1,5	1,482	0,182	0,1402	0,4822
2,0	1,690	0,208	0,1402	0,6900
2,5	1,927	0,237	0,1402	0,9269
3,0	2,197	0,270	0,1402	1,1970

El gráfico de la evolución del capital se presenta en la próxima página.

En la generación exponencial, a plazos iguales -ya sean mayores o menores que el período- les corresponden tasas iguales.

Comparando estos resultados con los de interés compuesto, coinciden sólo para períodos enteros, no así en los fraccionarios.



D. RÉGIMEN DE CAPITALIZACIÓN CONTINUA

En la capitalización continua, los intereses se generan y capitalizan en forma instantánea, es decir, el periodo de capitalización tiende a 0, entonces el interés es la derivada de la función capital:

$$I = \frac{dC}{dt} = \delta C$$

Esta es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, cuya solución particular es:

$$M = C_0 e^{\delta t}$$

En esta expresión δ es la tasa nominal anual y t el tiempo medido necesariamente en años.

De otra forma, si se parte de la expresión del monto del modelo exponencial:

$$M = C \left(1 + i_{(m)}\right)^n$$

y se expresa en función de la tasa nominal anual δ , resulta:

$$M = C \left(1 + \frac{\delta}{q}\right)^{tq}$$

para t tiempo medido en años y q número de periodos en que se divide el año.

Si se pretende una capitalización instantánea, la duración de los periodos de capitalización tiende a 0, o lo que es equivalente, q tiende a ∞ . Aplicando el límite a la expresión anterior se tiene

$$M = \lim_{q \rightarrow \infty} C \left(1 + \frac{\delta}{q} \right)^{tq}$$

que luego de algunas operaciones, da la expresión final:

$$M = C e^{t\delta}$$

Para este modelo

$$f(t) = e^{t\delta}$$

En este régimen, el dominio de la función $f(t)$ es el conjunto de los números reales.

Este modelo de interés tiene las siguientes características:

Periodicidad de la tasa

En este caso no se puede hablar de tasa periódica como en los modelos anteriores, ya que al ser el periodo infinitesimal su tasa correspondiente también debería serlo. Sólo se considera el caso de tasa nominal anual "convertible instantáneamente".

Tampoco se consideran diferentes los casos del tiempo entero o fraccionario. Como el periodo de capitalización tiende a 0, cualquier plazo puede ser considerado en este modelo, pero siempre expresado en años.

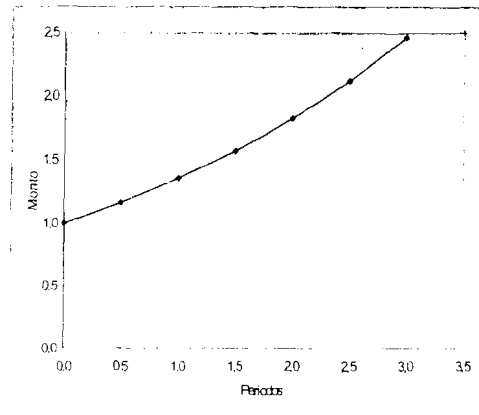
Propiedad de escindibilidad

Al ser esta también una función exponencial, cumple todas las propiedades matemáticas y connotaciones financieras del modelo exponencial.

En el ejemplo siguiente se trabaja con una tasa δ del 30 %.

Per	M	I	Tasa $i_{(m/2)}$	Tasa total
0	1,000	0,000		
0,5	1,162	0,140	0,1618	0,1618
1	1,350	0,160	0,1618	0,3499
1,5	1,568	0,182	0,1618	0,5683
2	1,822	0,208	0,1618	0,8221
2,5	2,117	0,237	0,1618	1,1170
3	2,460	0,270	0,1618	1,4596

La gráfica del monto será en este caso un trazo continuo por ser el dominio de la función el conjunto de los números reales.



Comparación entre el modelo exponencial y el continuo

En los casos prácticos, puede ser interesante establecer una situación de equivalencia entre el modelo exponencial y el continuo, ya que el tiempo difícilmente se exprese en unidades menores al día. No así en los análisis teóricos donde es necesario trabajar con funciones continuas.

Para que esta ley coincida con la exponencial, la relación entre las tasas deberá ser:

$$\delta = \ln(1 + i)$$

donde i es la tasa anual del modelo exponencial.

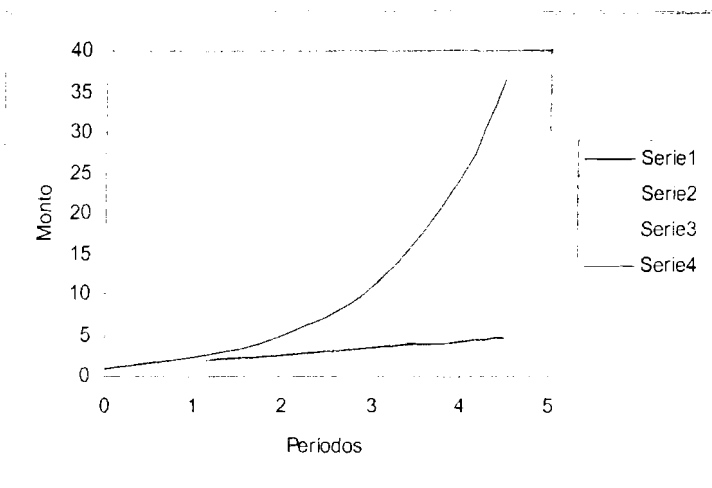
$$\delta = \ln(1 + 0,3) = 0,26236 \quad M = e^{t \times 0,26236}$$

Mes	M	I	Tasa $i_{(m/2)}$	Tasa total
0,0	1,000	0,000		
0,5	1,140	0,140	0,1402	0,1402
1,0	1,300	0,160	0,1402	0,3000
1,5	1,482	0,182	0,1402	0,4822
2,0	1,690	0,208	0,1402	0,6900
2,5	1,927	0,237	0,1402	0,9269
3,0	2,197	0,270	0,1402	1,1970

COMPARACIÓN GRÁFICA ENTRE LOS MODELOS

Si se piensa en una comparación gráfica entre los modelos, el primero queda representado por una recta (Serie 1), el segundo por una poligonal (Serie 2), y los últimos por una curva exponencial (Series 3 y 4). El modelo de interés compuesto, sólo coincide con la exponencial en

los puntos representativos de los períodos enteros, para las fracciones de período la curva exponencial siempre se encuentra por debajo de la poligonal.



Observación: en todos los gráficos se ha utilizado un trazado continuo para representar las respectivas funciones. Debe entenderse que esto sólo es así para el caso del régimen continuo, en los demás casos corresponde representar los modelos mediante puntos que evidencien como división mínima el día.

CONCLUSIONES

Luego de analizar cada uno de los modelos de generación del interés y sus implicaciones prácticas, se puede concluir que la coexistencia de criterios tan dispares para su cálculo resulta conflictivo en cuanto a la determinación del modelo a seguir, y complicado en su cálculo para los no expertos.

La pregunta es ¿se justifica hoy, con las herramientas de cálculo que se dispone, mantener esta gama de alternativas de generación y cálculo del interés?. Más aún, se debe tener en cuenta que en función de los avances tecnológicos, en todas las áreas de la ciencia los cálculos se han hecho más precisos y exigentes.

Una vez que se ha pactado la tasa periódica entre las partes, parece razonable adoptar el modelo exponencial con generación diaria del interés. Este modelo garantiza la equivalencia entre las distintas tasas, es decir una misma tasa efectiva anual, o lo que es lo mismo, igual tasa diaria a lo largo de toda la inversión.

Por ejemplo, si se ha pactado una tasa del 5 % anual se debe entender que, cumplido el año, el acreedor tiene derecho a percibir intereses también sobre ese 5 % generado en concepto de intereses, si es que no se le cancelaron. Si el plazo es menor, el monto estipulado debe ser tal que permita obtener el 5 % anual pactado para ambas partes.

Este modelo también es simplificador ante cualquier modificación en el contrato, prevista o no, y no ofrece alternativas de disputa.

Igual reflexión se puede hacer frente a economías inflacionarias donde es necesario ajustar el capital. Las tasas de ajuste siguen el modelo exponencial.

CUADRO RESUMEN

MODELOS DE GENERACIÓN DEL INTERÉS					
	$f(t)$	Dominio de $f(t)$	Capitalización	Relación entre $i_{(m)}$ e $i_{(t)}$	$i_{(m)}$ e $i_{(t)}$ son:
MODELO SIMPLE	$(1 + i_{(m)} n)$	$n \in \mathbb{Q}^+$	En t	$i_{(t)} = i_{(m)} n$	Tasas proporcionales
MODELO COMPUESTO	$(1 + i_{(m)})^n$	$n \in \mathbb{Z}^+$	Cada m días	$i_{(t)} = (1 + i_{(m)})^n - 1$	Tasas equivalentes
	$(1 + i_{(m)})^{n'} (1 + i_{(m)} f)$	$n' \in \mathbb{Z}^+$ y $f \in \mathbb{Q}^+$ y $0 < f < 1$	Cada m días y finalmente en t	$i_{(t)} = (1 + i_{(m)})^{n'} (1 + i_{(m)} f) - 1$	$i_{(t)}$?
MODELO EXPONENCIAL	$(1 + i_{(m)})^n$	$n \in \mathbb{Q}^+$	Diaria	$i_{(t)} = (1 + i_{(m)})^n - 1$	Tasas equivalentes
MODELO CONTINUO	$e^{n\delta}$	$n \in \mathbb{R}^+$	Continua	δ es una tasa nominal anual	No está definida la tasa periódica, ya que el periodo tiende a 0.

$n = \frac{t}{m}$; t = plazo en número de días; m = número de días del periodo

Este trabajo se terminó de imprimir en los talleres gráficos de la Dirección de Publicaciones de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de Cuyo, Mendoza (República Argentina) en septiembre de 2006.