

## DUALIDAD Y PROPIEDADES TIPO LIPSCHITZ EN OPTIMIZACIÓN

Marco A. López†, Andrea B. Ridolfi‡ y Virginia N. Vera de Serio†‡

† *Dep. of Statistics and Operations Research, University of Alicante, Spain; Honorary Research Fellow in the Graduate School of Information Technology and Mathematical Sciences at University of Ballarat, Australia, marco.antonio@ua.es*

‡ *CONICET, Facultad de Ciencias Aplicadas a la Industria, Universidad Nacional de Cuyo, Mendoza, Argentina, abridolfi@gmail.com*

†‡ *Facultad de Ciencias Económicas, I.C.B., Universidad Nacional de Cuyo, Mendoza, Argentina, vvera@uncu.edu.ar*

Resumen: En este trabajo estudiamos la estabilidad de los conjuntos factibles del problema dual, en optimización lineal en dimensión infinita con infinitas restricciones lineales y una restricción cónica adicional. Para ello, aplicamos algunos conceptos de la teoría de diferenciación generalizada, entre ellos el de Coderivada, para la aplicación a valores-conjunto de los conjuntos factibles. Analizamos también propiedades tipo Lipschitz de ésta aplicación y obtenemos cotas para el valor de la cota exacta Lipschitz.

Palabras claves: *programación semi infinita, dual, optimización convexa*

2000 AMS Subjects Classification: 90C34 - 90C48 - 90C31 - 49J53 - 46A20

### 1. INTRODUCCIÓN

Nuestro problema de optimización lineal perturbado es el siguiente:

$$\begin{aligned} P(b, c^*): \sup \langle \bar{c}^* + c^*, x \rangle \\ \text{s.a. } \langle a_t^*, x \rangle \leq \bar{b}_t + b_t, \quad t \in T, \\ x \in Q, \end{aligned}$$

donde  $T$  es un conjunto de índices arbitrario, posiblemente infinito,  $Q$  es un cono convexo cerrado en un espacio real de Banach  $X$ ,  $\bar{b}_t$ ,  $t \in T$ , son números reales y  $a_t^*$ ,  $t \in T$ , y  $\bar{c}^*$  están en el dual topológico de  $X$ , denotado por  $X^*$ . Considerando perturbaciones  $c^* \in X^*$  y  $b = (b_t)_{t \in T} \in \ell_\infty(T)$ , donde  $\ell_\infty(T)$  es el espacio real de Banach de todas las funciones acotadas en  $T$  con la norma supremo:  $\|b\|_\infty = \sup\{b_t : t \in T\}$ . (Omitiremos el subíndice  $\infty$  en el símbolo de la norma). El conjunto  $\{a_t^*, t \in T\} \subset X^*$  es fijo, arbitrario y acotado con la norma dual en  $X^*$  dada por:  $\|x^*\| = \sup\{\langle x^*, x \rangle : \|x\| \leq 1\}$ , (usaremos indistintamente  $\|\cdot\|$  para la norma en  $X$  y la correspondiente norma dual en  $X^*$ ). Observemos que, para cada  $x \in X$ ,  $\langle a_{(\cdot)}^*, x \rangle \in \ell_\infty(T)$ .

El problema primal  $P(b, c^*)$  tiene un problema dual asociado, también perturbado, llamado  $D(b, c^*)$ , definido por:

$$\begin{aligned} D(b, c^*): \inf \langle \mu, \bar{b} + b \rangle \\ \text{s.a. } A^* \mu \in \bar{c}^* + c^* - Q^0, \\ \mu \geq 0, \end{aligned}$$

donde  $\mu \in \ell_\infty(T)^*$ ,  $A: X \rightarrow \ell_\infty(T)$  es el operador lineal definido por  $Ax := \langle a_{(\cdot)}^*, x \rangle$ , (acotado y continuo debido a la acotación de  $\{a_t^*, t \in T\}$ ),  $A^*: \ell_\infty(T)^* \rightarrow X^*$  es el operador adjunto de  $A$  (es decir  $\langle A^* \mu, x \rangle = \langle \mu, Ax \rangle$  para cada  $\mu \in \ell_\infty(T)^*$ , y cada  $x \in X$ ) y  $Q^0$  es el cono dual de  $Q$ , dado por  $Q^0 := \{q^* \in X^* : \langle q^*, q \rangle \leq 0 \text{ para todo } q \in Q\}$ .

Llamaremos  $P$  y  $D$  a los problemas  $P(b, c^*)$  y  $D(b, c^*)$  no perturbados respectivamente (es decir  $b = 0$  y  $c^* = 0$ ).  $D$  se puede considerar dentro del modelo de dualidad desarrollado por Kretschmer en [14] y tiene un nivel medio de generalidad entre los aportes en Duffin [9] y Borwein [2]. Anderson y Nash dan detalles de esta teoría en [1, Chapter 3]. Últimamente ha aumentado el interés de la estabilidad en optimización, muchos prefieren trabajar con soluciones estables en vez de soluciones óptimas inestables. En [6],[7] y [8] se estudia la estabilidad cualitativa. En cuanto a la perspectiva cuantitativa, ver [4], [3], etc. El resumen reciente [15], nos da una idea amplia de lo hecho en los últimos quince años tanto cualitativa como cuantitativamente. Las referencias que nos inspiraron son, Cánovas et al. [5], Ioffe y Sekiguchi [12], y el reciente preprint [11].

Nuestro objetivo es obtener caracterizaciones de la estabilidad Lipschitziana de las soluciones factibles del problema dual, establecido en dimensión infinita. No requerimos que  $X$  sea reflexivo. Si bien en el problema primal obtuvimos una fórmula para el módulo Lipschitz asociado, aquí no lo presentaremos, sin embargo daremos cotas para el módulo Lipschitz del problema dual cuya situación es un poco más compleja. Para lograrlo, usaremos una potente herramienta del análisis variacional, como lo es la noción de coderivada, la cual es aplicada a problemas de optimización y control (ver [13], [16]). En [5] se aplicaron para analizar la estabilidad del problema primal en programación semi- infinita. .

## 2. NOTACIONES Y DEFINICIONES

Para un subconjunto  $\Omega \subset Z$  de un espacio de Banach  $Z$ , denotamos por  $\text{conv } \Omega$ ,  $\text{cone } \Omega$ ,  $\text{int } \Omega$ , y  $\text{cl } \Omega$ , a la cápsula convexa, cápsula cónica, interior y clausura de  $\Omega$ , respectivamente (los dos últimos con respecto a la topología de la norma). La clausura en la topología débil estrella de un subconjunto  $\Phi \subset Z^*$  la denotamos por  $\text{cl}^* \Phi$ . En el caso  $Z = \ell_\infty(T)$ , es sabido que, (ver [10]), hay un isomorfismo isométrico entre  $\ell_\infty(T)^*$  y  $ba(T)$ , el espacio de medidas  $\mu: 2^T \rightarrow \mathbb{R}$ , acotadas y aditivas. La norma dual en  $\ell_\infty(T)^*$  es la variación total, (para  $\mu \geq 0$  tenemos  $\|\mu\| = \mu(T)$ ).

Dada una aplicación conjunto valuada  $M: Z \rightarrow Y$  denotamos su dominio, gráfico y aplicación inversa (respectivamente) por  $\text{dom} M$ ,  $\text{gph} M$  y  $M^{-1}$ . Si  $(\bar{z}, \bar{y}) \in \text{gph} M$ , la **coderivada** de  $M$  en  $(\bar{z}, \bar{y})$  (*normal coderivative* en [16]) es la aplicación homogénea positiva  $D^* M(\bar{z}, \bar{y}): Y^* \rightarrow Z^*$  definida por:

$$D^* M(\bar{z}, \bar{y})(y^*) := \{z^* \in X^* : (z^*, -y^*) \in N((\bar{z}, \bar{y}), \text{gph} M)\}, \quad y^* \in Y^*,$$

donde  $N((\bar{z}, \bar{y}), \text{gph} M)$  es el cono normal al  $\text{gph} M$  en  $(\bar{z}, \bar{y})$  definido en [16, p.4]. El módulo de la coderivada está dado por

$$\|D^* M(\bar{z}, \bar{y})\| := \sup\{\|z^*\| : z^* \in D^* M(\bar{z}, \bar{y})(y^*), \|y^*\| \leq 1\}.$$

Si  $Z$  e  $Y$  son espacios normados y  $(\bar{z}, \bar{y}) \in \text{gph} M$ , se dice que  $M$  es **Tipo Lipschitz** alrededor de  $(\bar{z}, \bar{y})$  (*locally Lipschitz-like* in [16]) con módulo  $\ell \geq 0$ , si existen entornos  $U$  de  $\bar{z}$  y  $V$  de  $\bar{y}$  tal que

$$M(z) \cap V \subset M(u) + \ell \|z - u\| B_Y, \quad \text{para todo } z, u \in U$$

donde  $B_Y$  es la bola unitaria cerrada en el espacio  $Y$ . El ínfimo de éstos módulos  $\ell$  se llama **cota exacta Lipschitz** de  $M$  alrededor de  $(\bar{z}, \bar{y})$  y se denota por  $\text{lip} M(\bar{z}, \bar{y})$ . Esta cota admite la siguiente representación:

$$\text{lip} M(\bar{z}, \bar{y}) = \limsup_{(z, y) \rightarrow (\bar{z}, \bar{y})} \frac{\text{dist}(y, M(z))}{\text{dist}(z, M^{-1}(y))},$$

donde  $\text{dist}(x, \phi) = \infty$  y por convención  $0/0 := 0$ ,  $\infty/\infty = \infty$ . Escribimos  $\text{lip} M(\bar{z}, \bar{y}) = \infty$ , si  $M$  no es Tipo Lipschitz alrededor de  $(\bar{z}, \bar{y})$ . Esta cota equivale a la inversa de la tasa de suryección de  $M^{-1}$  alrededor de  $(\bar{z}, \bar{y})$  (ver [12, p.256]).

## 3. ESTABILIDAD LIPSCHITZIANA PARA LA APLICACIÓN FACTIBLE DEL DUAL

Para estudiar la estabilidad del dual, consideraremos la aplicación factible a valores-conjunto (o multifunción)  $F : X^* \rightarrow \ell_\infty(T)^*$ , definida como:  $F(c^*) = \{\mu \in \ell_\infty(T)^* : A^* \mu \in \bar{c}^* + c^* - Q^0, \text{ y } \mu \geq 0\}$ .

Reformulamos el problema dual perturbado de manera que nos permita aplicar resultados conocidos:

$$D(b, c^*): \quad \inf \langle \mu, \bar{b} + b \rangle$$

$$s.a. \quad \langle \mu, Aq \rangle \geq \langle \bar{c}^*, q \rangle + \langle c^*, q \rangle, \quad q \in \tilde{Q},$$

$$\langle \mu, p \rangle \geq -1, \quad p \in \ell_\infty(T)_+,$$

donde  $\tilde{Q}$  es cierto conjunto cerrado acotado que no contiene el vector nulo y genera el cono  $Q$ . De aquí en adelante consideraremos un cierto  $\tilde{Q}$  fijo.

**Definición 1**  $F$  satisface la condición Strong Slater en  $c^* \in X^*$ , si existe  $\mu \in \ell_\infty(T)$ ,  $\mu \geq 0$  tal que

$$\inf_{q \in \tilde{Q}} \{ \langle \mu, Aq \rangle - \langle \bar{c}^* + c^*, q \rangle \} > 0.$$

Tal  $\mu$  se llama punto Strong Slater de  $F$  en  $c^*$ .

Esta definición es independiente de la elección del conjunto cerrado acotado  $\tilde{Q}$ , además  $0 \notin \text{cl}(\text{conv}\tilde{Q})$  cuando  $F$  cumple la condición Strong Slater en  $c^* \in X^*$ , lo cual implica que el cono  $Q$  tiene vértice.

Definimos, al igual que en [5], el conjunto característico de  $F(c^*)$  relativo a  $\tilde{Q}$ , como el subconjunto convexo de  $\ell_\infty(T) \times \mathbb{R}$  dado por:  $C_D(c^*) := \text{conv}(\{(Aq, \langle \bar{c}^* + c^*, q \rangle) : q \in \tilde{Q}\} \cup \{(p, -1) : p \in \ell_\infty(T)_+\})$ .

Podemos estudiar la estabilidad con respecto a la consistencia mediante la aplicación  $F$  observando que un problema dual  $D(b, c^*)$ , es estable consistente si y sólo si  $c^* \in \text{int}(\text{dom}F)$ . Una aplicación del clásico teorema de Robinson-Ursescu (ver [16]) indica que esta condición es equivalente a que  $F$  sea Lipschitz-like alrededor de  $(c^*, \mu)$  para todo  $\mu \in F(c^*)$ . Además probamos que un problema consistente  $D(b, c^*)$ , satisface la condición Strong Slater si y sólo si  $(0, 0) \notin \text{cl}^* C_D(c^*)$ , y si además  $0 \notin \text{cl}(\text{conv}\tilde{Q})$ , esto es equivalente a que  $c^* \in \text{int}(\text{dom}F)$ .

La siguiente condición se necesita para obtener una estimación de la norma de la coderivada, la cual nos servirá para estimar la cota exacta Lipschitz de la aplicación factible dual.

(A):  $\tilde{Q}$  es un subconjunto cerrado generador de  $Q$  tal que existan números reales positivos  $r$  y  $R$ ; y un  $\bar{x}^* \in X^*$ ,  $\|\bar{x}^*\| = 1$ , que cumplan que  $0 < r \leq \langle \bar{x}^*, q \rangle \leq \|q\| \leq R$  para todo  $q \in \tilde{Q}$ . (Notar que en este caso el cono  $Q$  tiene vértice. Por ejemplo, se puede tomar cualquier base compacta  $\tilde{Q}$  de  $Q$ ).

**Teorema 2** Supongamos que  $Q$  satisface la condición (A) y que  $\bar{\mu} \in F(0)$ . Entonces

(i) Si  $\bar{\mu}$  es un punto Strong Slater de  $F$  en 0; entonces  $\|D^* M(\bar{z}, \bar{y})\| = 0$ .

(ii) Si  $\bar{\mu}$  no es un punto Strong Slater de  $F$  en 0; entonces  $\|D^* M(\bar{z}, \bar{y})\| > 0$  y

$$r \cdot \sup \left\{ \|b^{**}\|^{-1} : (b^{**}, \langle \bar{\mu}, b^{**} \rangle) \in \text{cl}^* C_D(0) \right\} \leq \|D^* M(\bar{z}, \bar{y})\| \leq R \cdot \sup \left\{ \|b^{**}\|^{-1} : (b^{**}, \langle \bar{\mu}, b^{**} \rangle) \in \text{cl}^* C_D(0) \right\}$$

Aplicando este Teorema, algunos resultados de [16], y siguiendo los pasos de [5] podemos obtener los mismos resultados, reemplazando  $\text{lip}M(\bar{z}, \bar{y})$  en lugar de  $\|D^* M(\bar{z}, \bar{y})\|$ . Así, podemos estimar la diferencia entre las constantes  $\text{lip}M(\bar{z}, \bar{y})$  y  $\|D^* M(\bar{z}, \bar{y})\|$ , y también obtenemos un supuesto que nos garantiza la igualdad entre ambas constantes. La situación del dual es más compleja que la del problema

primal donde la igualdad entre ambas constantes siempre se cumple, (ver Proposición 5 en [11]). Esta estimación la describimos en el próximo Corolario.

**Corolario 3** (i) Sea  $\bar{\mu} \in F(0)$ . Si  $Q$  satisface la condición (A) y  $F$  satisface la condición Strong Slater en 0, entonces existen constantes  $r$  y  $R$ ,  $0 < r \leq R$ , que dependen solamente del cono  $Q$ , tal que

$$0 \leq \text{lip}M(\bar{z}, \bar{y}) - \|D^*M(\bar{z}, \bar{y})\| \leq (R - r) \cdot \max \left\{ \|b^{**}\|^{-1} : (b^{**}, \langle \bar{\mu}, b^{**} \rangle) \in \text{cl}^* C_D(0) \right\}$$

(ii) Si  $F^{-1}(\ell_\infty(T)_+^*)$  tiene interior no vacío con respecto a la topología de la norma en  $X^*$ , y  $\{q \in Q : \|q\| = 1\}$  es  $w^*$ -cerrada en  $X^{**}$ , entonces

$$\text{lip}M(\bar{z}, \bar{y}) = \|D^*M(\bar{z}, \bar{y})\|.$$

Notar que la cota superior para  $\text{lip}M(\bar{z}, \bar{y}) - \|D^*M(\bar{z}, \bar{y})\|$  depende de las constantes obtenidas del cono  $Q$  y del conjunto característico  $C_D(0)$  correspondiente a cierto conjunto generador cerrado  $\tilde{Q}$ . En la prueba de (ii) se aplica [12, Proposición 5] y resultados obtenidos en aplicaciones perfectamente regular.

#### AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a MICINN de España, Grant MTM2008-06695-C03-01/03, ARC Discovery Project DP110102011 of Australia, y SECTyP-UNCUYO, Argentina.

#### REFERENCIAS

- [1] E. ANDERSON, P. NASH, *Linear Programming and Infinite-Dimensional Space*, Wiley and Sons, 1987.
- [2] J. M. BORWEIN, *Semi-infinite programming duality: How special is it?*, in A.V. Fiacco and K.O. Kortanek (eds.), *Semi-Infinite Programming and Applications*, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [3] M.J. CÁNOVAS, A. HANTOUTE, M.A. LÓPEZ, J. PARRA, *Lipschitz modulus in convex semi-infinite optimization via d.c. functions*, ESAIM Control Optim. Calc. Var., 15 (2009), pp.763-781.
- [4] M.J. CÁNOVAS, D. KLATTE, M.A. LÓPEZ, J. PARRA, *Metric regularity in convex semi-infinite optimization under canonical perturbations*, SIAM J. Optim., 18 (2007), pp.717-732.
- [5] M.J. CÁNOVAS, M.A. LÓPEZ, B.S. MORDUKHOVICH, J. PARRA, *Variational Analysis in Semi-infinite and Infinite Programming, I: Stability of Linear Inequality Systems of Feasible Solutions*, SIAM J. Optim., 20, no. 3, (2009), pp.1504-1526.
- [6] M.J. CÁNOVAS, M.A. LÓPEZ, J. PARRA, M.I. TODOROV, *Stability and well-posedness in linear semi-infinite programming*, SIAM J. Optim., 10 (1999), pp.82-99.
- [7] N. DINH, M.A. GOBERNA, M.A. LÓPEZ, *On the stability of the feasible set in optimization problems*, SIAM J. Optim., 20 (2010), pp.2254-2280.
- [8] N. DINH, M.A. GOBERNA, M.A. LÓPEZ, *On the stability of the optimal value and the optimal set in optimization problems*, Preprint, Dpt. of Statistics and Operations Research, Alicante University, 2010.
- [9] R.J. DUFFIN, *Infinite Programs. Linear inequalities and related systems*, Annals of Mathematics Studies, 38 (1956), pp.157-170.
- [10] N. DUNFORD, J.T. SCHWART, *Linear Operators Part I: General Theory*, Wiley, New York, 1988.
- [11] A.D. IOFFE, *On stability of solutions to systems of convex inequalities*, CRM Preprints, 984 (2010).
- [12] A.D. IOFFE, Y. SEKIGUCHY, *Regularity estimates for convex multifunctions*, Math. Program., Ser. B, 117 (2009), pp.255-270.
- [13] D. KLATTE, B. KUMMER, *Nonsmooth Equations in Optimization. Regularity, Calculus, Methods and Applications*, Kluwer, Dordrecht, 2002.
- [14] K.S. KRETSCHMER, *Programmes in paired spaces*, Canad. J. Math., 13 (1961), pp. 221-238.
- [15] M.A. LÓPEZ, *Stability in Infinitely Constrained Optimization: A Personal Tour*, preprint, Dpt. Of Statistics and Operations Research, Alicante University, 2010.
- [16] B.S. MORDUKHOVICH, *Variational Analysis and Generalized Differentiation I: Basic Theory*, Springer, Berlin, 2006.